МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Конспект лекций по спецкурсу ФА

Авторы:

*Виктор, Субботин Даниил, Козуб Денис, Алутис Никита,
Герасин Тимофей, Щербаков Виктор, Савицкий Илья, Чернышов Николай*

Внимание: данный PDF включает в себя все LaTeX исходники.
Чтобы извлечь прикрепленные файлы, воспользуйтесь:

- Linux: утилитой `pdfdetach`
- Windows/Macos: `AdobeAcrobat`.

Пожалуйста – исправляйте, дополняйте, улучшайте :)

12 Мая 2022 г.

Литература.

- [1] Андрей Николаевич Тихонов, Александр Андреевич Самарский. Уравнения математической Физики.

Лекция 1

1 Задача колебаний нагруженной струны

Струна непрерывна, закреплена на концах, а в некоторых точках $x = x_i,\ i = \overline{1,n}$ помещены сосредоточенные массы M_i. Если в точке x_i действует сосредоточенная сила F_i, то в этой точке должны выполняться соотношения:

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t) \quad \text{– соотношение непрерывности струны}$$
$$ku_x\Big|_{x_i-0}^{x_i+0} = -F_i(t) \quad \text{– разрыв связанный с силой натяжения}$$

Здесь k – *модуль Юнга* (коэффициент сопротивления материала растяжению/сжатию).

Если мы рассматриваем только действие массы, то под F_i понимается *сила инерции*. По второму закону Ньютона $F_i(t) = -M_i u_{tt}(x_i, t)$ (сила есть масса на ускорение).

Если говорить о более широкой задаче (не просто об однородной струне) – задачу на неоднородной струне, то мы должны ввести *плотность струны*.

Определение. *Плотность струны* $\rho(x)$ – величина, которая зависит только от пространственной переменной x.

2 Задача неоднородной струны

Уравнение колебаний в дивергентном виде:

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad \text{– условия закрепления концов} \end{cases}$$

Здесь l - длина струны.

Если величины k и ρ считать величинами зависящими от x, то решая эту задачу методом разделения переменных получим более сложное уравнения второго порядка – уравнение Штурма-Лиувилля с соответствующим переменным коэффициентом. Однако это только в том случае, если нет промежуточных нагрузок.

Если есть промежуточные нагрузки, то:

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & \text{– условия закрепления концов} \\ u(x_i+0,t) = u(x_i-0,t) & \text{– условие неразрывности струны} \\ M_i u_{tt}(x_i,t) = ku_x\Big|_{x_i-0}^{x_i+0},\ i = \overline{1,n} & \text{– условия сосредоточенных масс} \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{– начальные условия} \end{cases}$$

Общая схема решения в курсе УМФ (без нагрузок):

1. Писалась спектральная задача (задача без начальных условий)

2. Решалась методом разделения переменных применялся

3. В виде ряда выписывалось общее решение

4. Функции φ и ψ раскладывались по собственным функциям.

3 Решение задачи методом разделения переменных

Итак, рассматриваем неоднородную струну длиной l, плотностью ρ, с n нагрузками массами M_i в точках x_i, параметры системы следующие:

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) & \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 & \text{– условия закрепления концов} \\ u(x_i+0,t) = u(x_i-0,t) & \text{– условие неразрывности струны} \\ M_i u_{tt}(x_i,t) = k u_x\Big|_{x_i-0}^{x_i+0}, \ i=\overline{1,n} & \text{– условия сосредоточенных масс} \\ u(x,0)=\varphi(x), \ u_t(x,0)=\psi(x) & \text{– начальные условия} \end{cases}$$

1. Пока ищем решение не учитывая начальные условия (рассматриваем вспомогательную задачу). Ищем решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$.

2. Получаем: $T''(t) + \lambda T(t) = 0$, здесь параметр $\lambda = const$ показывает связь времени и пространственной переменной.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(k\dfrac{dX(x)}{dx}\right) + \lambda\rho X(x) = (kX'(x))' + \lambda\rho X(x) = 0 & \\ X(0) = X(l) = 0 & \text{– условия закрепления} \\ X(x_i-0) = X(x_i+0) & \text{– условия непрерывной струны} \\ M_i X(x_i) T''(t) = T(t) k X'(x)\Big|_{x_i-0}^{x_i+0} & \end{cases}$$

Это спектральное уравнение второго порядка для $X(x)$. Подставив вместо $T''(t)$ результат для T, получим условие со спектральным параметром на границах:

$$kX'(x)\Big|_{x_i-0}^{x_i+0} = -\lambda M_i X(x_i)$$

3. Задача на собственные значения:

$$\begin{cases} (kX'(x))' + \lambda\rho X(x) = 0, \quad k(x)>0, \ \rho(x)>0 & \\ X(0) = X(l) = 0 & \text{– условия закрепления} \\ X(x_i-0) = X(x_i+0) & \text{– условия непрерывной струны} \\ kX'(x_i-0) - kX'(x_i+0) + \lambda M_i X(x_i) = 0, \quad i=\overline{1,n} & \end{cases}$$

Усложнение задачи в том, что имеется спектральный параметр λ не только в уравнении, но и в граничных условиях.

4. Если нагрузки нет, то система
$$\begin{cases}(kX'(x))' + \lambda\rho X(x) = 0\\ X(0) = X(l) = 0\end{cases}$$
дает систему собственных функций, которая ортогональна
$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \int_0^l X_n(x)X_m(x)\rho(x)dx = 0, \quad m \neq n$$
Если же нагрузка есть, то
$$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \int_0^l X_n(x)X_m(x)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{k} X_n(x)X_m(x) = 0, \quad m \neq n$$
Получили новое функциональное пространство. Его можно интерпретировать по-разному (???). Например, можно интерпретировать как пространство, связанное с интегралом Лебега-Стилтьеса (см. курс ТВиМС).

5. Наконец можем написать решение. Так как последняя система из пред. пункта является ортогональной, то функцию $f(x)$ из класса, который обладает определенной гладкостью можно разложить в соответствующий ряд:
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x)$$
Формально, имеем скалярное произведение, порожденное рядом выше (?):
$$f_n(x) = \frac{\displaystyle\int_0^l f(x)X_n(x)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{n} M_i f(x)X_n(x_i)}{\displaystyle\int_0^l X_n^2(x)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{n} M_i X_n^2(x_i)}$$
Отметим, что в знаменателе написаны условия нормировки. Справедливость зависит от параметров системы (гладкости $\rho(x)$, гладкости собственных функции и т.д.). Как правило, достаточно непрерывности двух производных по x. Так же отметим, что количество нагрузок – не принципиально, принципиально их наличие.

Эта задача взята из [1].

Лекция 2

Пространство называется метрическим, если на нем введено расстояние между 2 элементами $\rho(x,y) \geq 0; x,y \subset M$, удовлетворяющее аксиомам:

1. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ – аксиома тождества
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)\ \forall x,y \in M$ – аксиома симметрии
3. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)\ \forall x,y,z \in M$ – аксиома треугольника

Если $M = R^n$, то $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Для произвольных пространств расстояние может быть введено по формуле $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$. Последовательность $x_n \to x : \rho(x_n, x) \to 0$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, если $\rho(x_n, x_m) \to 0, n, m \to \infty$. Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Шар в метрическом пространстве: $B(a,r) = \{x \in M : \rho(a,x) < r\}$. Замкнутый шар: $\overline{B(a,r)} = \{x \in M : \rho(a,x) \leq r\}$. Множество называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.

Определение. Точка a – *предельная* для $X \subseteq M$, если $B(a,r) \cap [X \setminus \{a\}] \neq \emptyset$. X называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. X *открыто*, если оно является дополнением к некоторому замкнутому множеству. *Замыкание* $\overline{X}$ – объединение X и всех его предельных точек. X – *всюду плотное* в M, если $\overline{X} = M$. X – *нигде не плотное*, если $\forall B(a,r) \subseteq M \Rightarrow \exists B(a',r') \subset B(a,r) : X \cap B(a',r') = \emptyset$.

Определение. Линейное пространство X называется линейным нормированным пространством, если каждому элементу X поставлено в соответствие $\|x\| \in \mathbb{R}, \|x\| > 0$, удовлетворяющее

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||, \alpha \in X$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

В линейном нормированном пространстве расстояние можно ввести, как $\rho(x,y) = ||x - y||$.

Введя мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_j \geq 0$ в $\mathbb{E}^n$, можно записать оператор дифференцирования

$$D_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha, \quad \text{где} \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Определение. Пусть Ω - открытое ограниченное множество в $\mathbb{E}^n$. Носитель $\text{supp}\ (v) = \overline{\{x \in \Omega | v(x) \neq 0\}}$. Введем пространство $D(\Omega) : C^\infty$, $\text{supp}\ (v) \subset \Omega\ \forall v$. Сходимость: $v_k(x) \to v(x)$, если

$$\forall \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \max_{x \in \Omega} |D^\alpha v_k(x) - D^\alpha v(x)| = 0$$

Введем $C^m(\overline{\Omega})$ - множество всех непрерывно дифференцируемых функций на множестве $\overline{\Omega}$. Норма

$$||f||_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)| = \{\text{через полунорму - не выполняется первая аксиома}\} =$$
$$= \max_{0 \leq k \leq m} |f|_{C^k(\overline{\Omega})}, \ |f|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| = k} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)|$$

Введем $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^m(\overline{\Omega}),\ 0 < \lambda \leq 1$:

$$|f|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|=m} \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda} < \infty$$

$|x-y|$ - точная нижняя грань длин спрямляемых кривых, соединяющих точки x и y, и целиком лежащих внутри $\overline{\Omega}$ $||f||_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})} = ||f||_{C^m(\overline{\Omega})} + |f|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})}$.

Пусть $p \geq 1$, $|f^p| \in \mathbb{I}(\Omega)$, тогда $||f||_{L_p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{1/p}$, и все три аксиомы выполняются для непрерывной f.

На пространстве последовательностей рассмотрим метрику $\rho = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

Пусть $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots),\ y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$, тогда

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}$$

По теореме Вейерштрасса ряд сходится. Аксиома треугольника следует из неравенства

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

Лекция 3

Определение. В Евклидовом пространстве E^n множество Ω называется множеством n-мерной меры нулью, если $\forall\varepsilon > 0$ найдется счетная система открытых n-мерных кубов, объединение которых содержит это множество Ω, а сумма объемов которых, меньше ε.

$$\Omega \subset E^n \quad \text{меры нуль, если} \quad \exists\{K_i\}_{i=1}^{\infty} - \text{система открытых кубов} \ : \ \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \text{Volume}(K_i) < \varepsilon$$

Замечание. Ω - открытое, ограниченное множество.

Определение. Некоторое свойство выполнено *почти всюду* (п.в.) в Q, если оно выполнено во всех точках $x \in Q$, возможно, за исключением точек, образующих меру нуль.

Определение. Функция $f(x)$ заданная в области Q называется *измеримой*, если она является пределом почти всюду в Q сходящейся последовательности функций из класса $C(\overline{Q})$.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad f_n(x) \in C(\overline{Q})$$

Определение. Измеримое множество – то множество, для которого характеристическая функция измерима.

Определение. Характеристической функцией множества E называется функция

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Определение. Две функции f и g заданные в области Q называются эквивалентными, если они почти всюду совпадают. Обозначается $f \sim g$.

Определение. Будем говорить, что $f(x)$ определенная на Q принадлежит классу $L^+(Q)$, если существует неубывающая последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$ с компактными носителями принадлежащими Q такая, что последовательность интегралов Римана является ограниченной.

$$f(x) \in L^+(Q) \ \text{ если } \ \exists\{f_n(x)\} \ : \ f_n \leq f_{n+1}, \quad f_n \in C(\overline{Q}), \quad \overline{\text{supp } f_n(x)} \in Q$$
$$\int_Q f_n(x)dx < +\infty \qquad \int_Q f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_Q f_n(x)dx = \sup_n \int_Q f_n(x)dx$$

Замечание. Функции f_n называются *финитными.*
Замечание. Монотонность последовательности существенна.

Определение. Функция называется $f(x)$ интегрируемой по Лебегу в области Q, если ее можно представить в виде разности двух функций $f_1(x)$, $f_2(x) \in L^+(Q)$, то есть $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Интегралом Лебега назовем их разность интегралов этих функций:

$$\int_Q f(x)dx = \int_Q f_1(x)dx - \int_Q f_2(x)dx$$

Определение. Пространство $L_p(Q)$, $p \geq 1$ – пространство измеримых на Q функций, для которых существует интеграл $\int_Q |f(x)|^p dx$.

Определение. Норма для $f \in L_p(Q)$ вводится по формуле:

$$\|f\|_{L_p(Q)} = \left(\int_Q |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Замечание. Первые две аксиомы нормы очевидны, а для доказательства третьей (неравенство треугольника) нужно рассмотреть неравенство Юнга, с помощью которого выводиться неравенство Гельдера откуда следует неравенство Минковского, доказывающее третью аксиому.

Определение. Функция $v(x) \in L_1(Q)$ называется *обобщенной производной* порядка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – мультииндекс – для функции $f(x) \in L_1(Q)$, если $\forall \varphi(x) \in D(Q)$ выполняется тождество:

$$\int_Q v(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_Q f(x)D^\alpha\varphi(x)dx$$

Обозначается: $v(x) = D^\alpha f(x)$.
Замечание. Классическая производная удовлетворяет этому определению.
Замечание. Обобщенная производная может существовать одновременно с отсутствием классической производной. Пример 1: $f(x) = |x|$ имеет обобщенную, но не классическую производную. Пример 2: $f(x) = \operatorname{sgn} x$ не имеет и обобщенную производную.

$$Q = (-1, 1) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{\partial\varphi}{\partial x}\operatorname{sgn} x dx = \int_0^1 \varphi' dx - \int_{-1}^0 \varphi' dx = -2\varphi(0) = -\int_{-1}^1 v\varphi dx$$

Если взять за $\varphi = \exp(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2})$ если $|x| \le \varepsilon$, иначе 0, $\varepsilon \in (0, 1)$, то $\varphi \to 0$. Тогда в записи выше последний интеграл будет стремиться к нулю, а $-2\varphi(0) > 0$. Противоречие доказывает отсутствие обобщенной производной у $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Задача для себя. Доказать, что функция $f(x_1, x_2) = \operatorname{sgn} x_1 + \operatorname{sgn} x_2$ не имеет первых частных производных, но имеет вторую частную производную по x_1, x_2 на множестве $Q = [-1; 1] \times [-1; 1]$.

Пусть Ω открытое, ограниченное множество с непрерывной по Липшицу границей. Это значит, что у каждой точки существует окрестность в n-мерном пространстве (т.е. шар), в котором можно какую-либо координату x_i представить в виде функции $\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ от всех других координат, где функция φ - непрерывна. Если функция из класса $C^m(\varphi)$, то говорят, что граница принадлежит φ (??).

Будем считать, что на рассматриваемых множествах граница достаточно хорошая, что на них можно применить формулу Остроградского.

Пусть $m \in \mathbb{Z}_+,\ p > 1$.

Определение. Пространство $W_p^m(\Omega)$ – обобщение пространства $L_p(\Omega)$ с обобщенными производными.

$$W_p^m(\Omega) = \{u(x) \in L_p(\Omega) \mid \exists D^\alpha u \in L_p(\Omega),\ |\alpha| \le m\}$$

Определение. Норма на $W_p^m(\Omega)$ вводится как

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{1/p} = \left(\sum_{s=0}^m |u|^p_{W_r^s(\Omega)}\right)^{1/p}$$

Последнее равенство вводит норму через полунорму, которая вводится как:

$$|u|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{1/p}$$

Теорема 1. Пространство $W_p^m(\Omega)$ является полным (банаховым).

Определение. Множество $W_p^m(\Omega)$ можно получить замыканием пространства $C^m(\overline{\Omega})$ по норме $\|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}$. То есть рассмотреть все фундаментальные последовательности из класса $C^m(\overline{\Omega})$ в этой норме, и их предел рассматривать как элемент, принадлежащий пространству $W_p^m(\Omega)$.

Определение. $\mathring{W}_p^m(\Omega)$ – получается замыкание пространства $D(\Omega)$ по норме $W_p^m(\Omega)$.

Замечание. В таких пространствах полунорма обычно эквивалентна норме, за счет того, что ноль на границе остается нулем на границе.

Определение. При $p = 2$ норму можно породить скалярным произведением. Такое пространство называется *Гильбертовым.*

Утверждение. Для того, чтобы пространство было Гильбертовым, необходимо и достаточно, чтобы для нормы выполнялось равенство параллелограмма

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Рассмотрим два линейных нормированных пространства X и Y, и оператор $A : X \to Y$.

Определение. Оператор A называется линейным, если он однородный – $A(\alpha x) = \alpha A(x)$ – и аддитивный – $A(x+y) = A(x) + A(y)$.

Определение. Оператор непрерывен, если из сходимости последовательности точек $\{x_n\}$ следует сходимость последовательности точек $\{A(x_n)\}$.

Теорема . Если оператор непрерывен хотя бы в одной точке, то он непрерывен и во всем пространстве.

Определение. Оператор является ограниченным, если $\exists M = const$, такая, что $\forall x \in X : \|A(x)\| \leq M\|x\|$. Константа M называется *нормой оператора.*

Утверждение. Чтобы оператор был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.

Определение. Норму оператора A можно ввести и как:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Определение. *Линейным функционалом* называется оператор $f(x) : X \to \mathbb{R}$

Лекция 4

1 Лемма Брэмбла-Гильберта

Лемма Брэмбла-Гильберта. Пусть

$\Omega \subset E^n$ – открытое, выпуклое, ограниченное.

$d = \sup\limits_{x,y\in\Omega} \|x-y\|$.

$L(u)$ – линейный функционал, ограничен в $W_2^m(\Omega)$, где m может быть нецелым, то есть $0 < m = \overline{m} + \lambda$, $\overline{m} \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in (0;1]$. То есть для $L(u)$:

$$|L(u)| \leq M \left(\sum_{j=0}^{\overline{m}} d^2 j |u|^2_{W_2^j(\Omega)} + d^{2m} |u|^2_{W_2^m(\Omega)} \right)^{1/2}$$

Здесь $L(u)$ обращается в 0 на многочленах степени $\overline{m}$ по переменным $x_1, \dots, x_n$

Тогда $\exists \overline{M}$ не зависящая от $u(x)$, такая, что $|L(u)| \leq M\overline{M} d^m |u|_{W_2^m(\Omega)}$

2 Применение леммы Брэмбла-Гильберта к квадратурной формуле трапеций

Определение. Данные формулы применяются для оценки скорости сходимости квадратурной формулы.
Рассмотрим вначале вспомогательный функционал:

$$L(u) = \int_0^h u(x)dx - \frac{h}{2}\left[u(0) + u(h)\right],\ u \in W_2^2(0,h)$$

который представляет собой разность между интегралом и площадью трапеции. Оценим этот функционал. Заметим, что $W_2^2(0,h) \subset C\,[0,h]$. Проведем замену(нормировку): $t = \frac{x}{h}$, тогда $\tilde{u}(t) = u(t,h)$. Тогда:

$$L(u) = L(\tilde{u}(t)) = \frac{h}{2}\left[2\int_0^1 \tilde{u}(t)dt - \tilde{u}(0) - \tilde{u}(1)\right]$$

и, т.к.

$$\max_{0\leq t\leq 1} |\tilde{u}(t)| \leq \sqrt{2}\left(\int_0^1 \left[\tilde{u}(t) + (\tilde{u}'(t))^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\|\tilde{u}\|_{W_2^1(0,1)} \leq \sqrt{2}\|\tilde{u}\|_{W_2^2(0,1)},$$

то

$$|L(\tilde{u})| \leq \frac{5}{2} h \|\tilde{u}\|_{W_2^2(0,1)}$$

Т.к. $L(\tilde{u})$ обращается в 0 на многочленах первой степени и оценивается через норму W_2^2, то можно применить лемму Брэмбла-Гильберта для его оценки:

$$|L(\tilde{u})| \leq Mh|\tilde{u}|_{W_2^2(0,1)} \Rightarrow |L(\tilde{u})| \leq Mh^{\frac{5}{2}}|\tilde{u}|_{W_2^2(0,h)}$$

Теперь перейдем непосредственно к квадратурной формуле трапеций. Рассмотрим разностную схему:

$$L(f) = \int_0^1 f(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right],\ x_i = ih,\ h = \frac{1}{N}$$

Используя аддитивность интеграла Лебега, $L(f)$ можно представить в виде:

$$L(f) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{h}{2} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i) \right] \right\}$$

Для каждого слагаемого в скобках применим оценку, полученную для $L(u)$:

$$| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{h}{2} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i) \right] | \le M h^{\frac{5}{2}} |f|_{W_2^2(x_{i-1}, x_i)}$$

Тогда, применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$|L(f)| \le M h^{\frac{5}{2}} \sum_{i=1}^{N} |f|_{W_2^2(x_{i-1}, x_i)} \le \{\text{К-Б}\} \le M h^{\frac{5}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} |f|_{W_2^2(x_{i-1}, x_i)} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{N} = M h^2 |f|_{W_2^2(0,1)}$$

Лекция 5

1 Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями

Пусть $\Omega \in \mathbb{E}^n$ - открытое ограниченное множество, $\Gamma = \partial\Omega$ - его граница. Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}) + q(x)u(x) = -f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$$

Матрица A симметрична: $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $q(x), f(x) \in C(\overline{\Omega})$, а сам оператор равномерно-эллиптический (???), то есть

$$\forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \Rightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \gamma = const > 0$$

Частный случай равномерной эллиптичности - оператор Лапласа.

Определение. Функция u(x) называется *классическим решением первой краевой задачи (задачи Дирихле)*, если

1. $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$
2. $Lu = f,\ x \in \Omega$
3. $u(x) = \mu(x),\ x \in \Gamma$

Теорема Шаудера. Пусть $m \geq 2$, $a_{ij}(x), q(x) \in C^{m-1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $q(x) \geq 0$ (может быть ослаблено), $\Gamma \in C^{m,\alpha}$ (для каждой точки границы существует локальная система координат, существует окрестность $\mathbb{E}^m$, точки которой могут быть описаны следующим образом: какая-то координата - функция из класса $C^{m,\alpha}$ от остальных координат), $f(x) \in C^{m-2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\mu \in C^{m,\alpha}(\Gamma)$. Тогда задача Дирихле имеет единственное решение $u(x) \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$.

В курсе УМФ теорема доказывается для оператора Лапласа, используя потенциал двойного слоя, и принцип максимума для доказательства единственности.

2 Обобщенные решения

Недостаток обобщенного решения - оно не позволяет получить локальные характеристики решения.

Рассмотрим равномерно эллиптическое уравнение $Lu = f$. Пусть u - его решение. Домножим уравнение на $v(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $v(x)|_\Gamma = 0$. Используя формулу Остроградского, проинтегрируем по частям. Граничные интегралы обратятся в ноль. Получим следующее равенство:

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + quv \right) dx = \int_\Omega fv\, dx \tag{$*$}$$

Если u(x) дважды дифференцируема в Ω, то от f требуем лишь непрерывность в Ω.

Если $f \in L_2(\Omega)$, $u(x) \in W_2^1(\Omega)$, $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $a_{ij}, q(x) \in L_\infty$, можно ввести класс $L_\infty(\Omega)$.

Определение. Пусть $f(x)$ - измерима на Ω. Существенный максимум $M = vrai\underset{\Omega}{max}|f(x)|$, если

1. $\exists A_0 \subset \Omega : |A_0| = 0;\ |f(x)| \le M,\ x \in \Omega \setminus A_0$

2. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists A_\varepsilon \subset \Omega : |A_\varepsilon| > 0;\quad |f(x)| > M - \varepsilon,\ x \in A_\varepsilon$

Из (*) возникают два варианта определения обобщенного решения. Первый - при $u \in W_2^2(\Omega)$ - ???.

Имеем дело с тождеством. Известные величины - коэффициенты, правая часть и граничная функция $\mu(x)$. $a_{ij}(x), q(x) \in L_\infty$. $\mu(x)$ может быть продолжена на Ω с границей Γ так, чтобы $\mu(x) \in W_2^1(\Omega)$.

Определение. *Обобщенным W_2^1-решением задачи Дирихле* $Lu = f, u\big|_\Gamma = \mu$ назовем функцию $u(x) \in W_2^1(\Omega)$, $u(x) - \mu(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ выполняется тождество (*).

Теорема 1. $a_{ij}(x), q(x)$ - ограниченны и измеримы в Ω, для почти всех x $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $q(x) \ge 0$, $f \in L_2(\Omega)$, $\mu(x)$ может быть продолжена на Ω, т.ч. $\mu(x) \in W_2^1(\Omega)$, то существует единственное обобщенное W_2^1-решение задачи Дирихле.
Доказана в книге авторов Самарский Лазаров (???) Макаров.

Теорема вложения. Пусть по-прежнему Ω - это ограниченная область с границей Γ в пространстве $\mathbb{E}_n$. Пусть $\Gamma \in C^m$, $m \in \mathbb{R}$, $m \ge 0$. Если $u(x) \in W_p^m(\Omega)$, $p \ge 1$, $m \ge 0$, то след $v = u\big|_\Omega$ принадлежит классу $W_p^{m-\frac{1}{p}}(\Gamma)$, т.е. функция v будет фундаментальной последовательностью, и полнота пространства обеспечит сходимость функции v к некоторой функции из класса $W_p^{m-\frac{1}{p}}(\Gamma)$. Имеет место оценка

$$\|v\|_{W_p^{m-\frac{1}{p}}(\Gamma)} \le K_1 \cdot ||u||_{W_p^m}$$

В обратную сторону теорема также верна.

Рассмотрим одномерный случай: $v \in W_2^1$, тогда на границе $v \in W_2^{\frac{1}{2}}$. Вообще говоря, теоремы вложений не являются точными, их можно усилить. Тем не менее, отсюда вытекают следующие утверждения, которые важны для нас в определении обобщенного решения:

1. $W_2^2(\Omega) \subset W_2^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \subset W_2^1(\Gamma) \subset L_2$

2. $W_2^{1+\varepsilon}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, $\varepsilon > 0$, если случай одномерный, то $W_2^1(\Omega)$ вкладывается в класс непрерывных функций на сегменте, но в общем случае это не так

3. $W_2^1(\Omega) \subset L_p(\Omega)$, $\quad p \ge 1$, $\quad p \le +\infty$

Обобщенные функции определяются на примере пространства W_2^m и используют понятие линейного функционала.

В разностных схемах классическая производная меняется на разностную производную.

Лекция 6

1 Теорема Банаха-Штейнгауза на примере задачи интерполяции

Пусть на отрезке $[0, 1]$ задана матрица T :

$$\begin{array}{llll} t_1^{(1)} & & & \\ t_1^{(2)}, & t_2^{(2)} & & \\ t_1^{(3)}, & t_2^{(3)}, & t_3^{(3)} & \\ \ldots & & & \\ t_1^{(n)}, & t_2^{(n)}, & \ldots, & t_n^{(n)} \end{array}$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} x(t_k^{(n)}) l_k^{(n)}(t)$$
$$x(t) \in C[0, 1]$$
$$l_k^{(n)}(t) = \frac{\omega_n(t)}{\omega_n'(t_k^{(n)})(t - t_k^{(n)})}$$
$$\omega_n(t) = \prod_{k=1}^{n} (t - t_k^{(n)})$$

Пусть есть некоторая функция X. Действительно:

$$L_n(t_k^{(n)} = X(t_k^{(n)}$$

Теорема 1.

$$\forall T \ \ \exists x(t) \in C[0, 1] \ : \ L_n(t) \not\rightrightarrows x(t), \quad n \to +\infty$$

Доказательство:

$$\lambda_n(t) = \sum_{k=1}^{n} |l_k^{(n)}(t)|, \quad ||L_n|| = \lambda_n$$

Неравенство Бернштейна: $\lambda_n > \frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}$
Если бы $L_n(t) \rightrightarrows x(t)$, то по теореме Банаха-Штейнгауза $||L_n|| \le c$ $\square$

Отсюда если мы не можем разобраться с интерполяцией как надо, то с экстраполяцией тем более.

2 Разностные задачи

Разностные схемы строятся по принципу аппроксимации. Начнем с оценки соответствующих аппроксимаций производными.

Итак, рассматриваем область $\Omega = \{x \in E^2 : |x_i| < h_i, \ h_i > 0, \ i = 1, 2\}$. Рассмотрим вопрос об аппроксимации производной:

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial x_1} \sim \frac{u(h_1,0)-u(-h_1,0)}{2h_1}$$
$$u(x_1,x_2) \in W_2^3(\Omega)$$
$$W_2^3(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})$$
$$l(u) = \frac{u(h_1,0)-u(-h_1,0)}{2h_1} - \frac{\partial u(0,0)}{\partial x_1},$$
$$\text{Замена} \quad t_i = x_i/h_i,\ i=1,2$$
$$\widetilde{u}(t_1,t_2) = u(h_1t_1, h_2t_2)$$
$$l(u) = l(\widetilde{u}) = \frac{1}{2h_1}[\widetilde{u}(1,0) - \widetilde{u}(-1,0) - 2\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t_1}(0,0)]$$
$$|l(\widetilde{u})| \leq \frac{M}{h_1}||\widetilde{u}||_{W_2^3(\widetilde{\Omega})}, \quad M = const, \quad \widetilde{\Omega} = \{t \in E^2 : |t_i| < 1,\ i=1,2\}$$

Раз этот функционал обращается на многочленах второй степени, оценка через W_2^3, то по лемме Брэма-Гильберта у нас есть оценка уже не с нормой, а с полунормой вида:

$$|l(u)| = |l(\widetilde{u})| \leq \frac{M}{h_1}|\widetilde{u}|_{W_2^3(\widetilde{\Omega})} \leq \frac{M}{h_1}|h|^3(h_1h_2)^{-\frac{1}{2}}|u|_{W_2^3(\widetilde{\Omega})}$$
$$|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$$
$$\frac{h_2}{h_1} \leq c, \quad c = const \ : \ |l(u)| \leq M|h^2|(h_1h_2)^{-\frac{1}{2}}|u|_{W_2^3(\widetilde{\Omega})}$$
$$u \in C^3(\Omega) \ : \ |u|_{W_2^3(\widetilde{\Omega})} \leq (4h_1,h_2)^{\frac{1}{2}}||u||_{C^3(\Omega)}$$
$$|l(u)| \leq M_2|h|^2||u||_{C^3(\Omega}$$

3 Обобщенные функции

Если у нас функция $f(x) \in L_1(\Omega)$, где Ω это опять какое-то ограниченное открытое множество в пространстве R^n, то ее можно связать с неким линейным функционалом, определенным на пространстве основных функций, то есть

$$\forall f(x) \in L_1(\Omega) \ \text{ интеграл } \ \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \varphi(x) \in D(\Omega)$$
$$\int_\Omega f(x)[\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)]dx = \lambda\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx + \mu\int_\Omega f(x)\psi(x)dx$$
$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \to 0 \ \text{ если } \ \varphi_n(x) \to 0 \ \text{ в } \ O(\Omega) \ \text{ при } \ n \to \infty$$

Определение. Будем называть *обобщенной функцией* любой линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций. Он обычно обозначается $\langle f, \varphi\rangle$

Определение. *Дельта функция* - значение в нуле φ: $\langle \beta, \varphi\rangle = \varphi(0)$

Множество обобщенных функций будем обозначать будем обозначать $D'(\Omega)$

Определение. *Производная* D^α от $f \in D'(\Omega)$ определяется по формуле:

$$\langle D^\alpha, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha\varphi\rangle \quad \forall\varphi \in D(\Omega)$$

Лекция 7.

Рассмотрим область:
$\Omega = \{(x_1, x_2) = x, 0 < x_i < 1, i = 1, 2\}$, $\Gamma - \partial D$ (граница области).
Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x), \qquad x \in \Omega,\ u(x) = 0,\ x \in \Gamma$$

Пусть $f(x) \in L_2(\Omega) \Rightarrow \exists$ единственное решение $u(x) \in W_2^2(\Omega)$ для которого:

$$||u_x||_{W_2^2(\Omega)} \leq C||f||_{L_2(\Omega)}$$

Построим в области Ω сетку $\overline{\omega} = \{(x_1, x_2) : x_i = x_{ij_i} = j_i h_i, \quad j_i = 0, 1, \dots, N_i, \quad R_i = \frac{1}{N_i}, \quad i = 1, 2\}$, где N_i - натуральное число, $i = 1, 2$.
Предположим, что $\exists c_1, c_2 > 0$:

$$c_1 \leq \frac{h_2}{h_1} \leq c_2, \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2,$$

Пусть

$$\eta(\xi, x) = \begin{cases} (h_1 h_2)^{-1} & |x_i - \xi_i| < \frac{h_i}{2}, \quad i = 1, 2 \\ 0 & \text{в остальных точках } x \in \omega,\ \xi \in R^2 \end{cases}$$

Рассмотрим следующее соотношение:

$$\iint\limits_{\Omega} \Delta u(\xi)\eta(\xi, x) d\xi = -\iint\limits_{\Omega} f(\xi)\eta(\xi, x) d\xi$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{1}{h_\alpha} S_{3-\alpha} \Big(\frac{\partial_\eta^{(+0,5_\alpha)}}{\partial x_\alpha}(x) - \frac{\partial_u^{(-0,5_\alpha)}}{\partial x_\alpha}(x) \Big) = -S_1 S_2 f(x), \quad x \in \omega$$

$$S_1 w(x) = \int\limits_{x_1 - \frac{h_1}{2}}^{x_1 + \frac{h_1}{2}} w(\xi, x_2) d\xi$$

$$S_2 w(x) = \int\limits_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} u(x_1, \xi) d\xi$$

$$y^{(+0,5_\alpha)}(x) = y(x1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha + \frac{h_\alpha}{2}, x_{\alpha+1}, \dots, x_n)$$

$$y^{(-0,5_\alpha)}(x) = y(x1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha - \frac{h_\alpha}{2}, x_{\alpha+1}, \dots, x_n)$$

$$y_{\overline{x_i}} = [y(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n) - y(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i-1}-h_i,x_{i+1},\dots,x_n)]/h_i$$
$$y_{x_i} = [y(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+h_i,x_{i+1},\dots,x_n) - y(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)]/h_i$$

Для разностного суммирования используется следующее обозначение:

$$(y,v) = \sum_{x\in\omega} y(x)v(x)h_1\dots h_n$$

$$S_2\frac{\partial u^{(+0,5_1)}}{\partial x_1}(x) = \frac{1}{h_2}\int\limits_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big(x_1+\frac{h_1}{2},\xi\Big)\xi \cong \frac{u(x_1+h_1,x_2)-u(x_1,x_2)}{h_1}$$

($\cong$ — это знак ассоциации)

$$\Delta y = y_{\bar{x}_1x_1} + y_{\bar{x}_2x_2} = -\varphi(x) = -S_1S_2f(x), \quad x\in\omega, \quad y(x)=0$$

(Вообще тут и ниже какой-то треугольник с ножками должен быть — разностный оператор Лапласа, но я использую обычный треугольник)
Погрешность $z = y - u$

$$\Delta z = -\psi(x), \quad x\in\omega, \quad z(x)=0, \quad x\in\gamma,$$

где $\psi(x) = \varphi(x) + \Delta u(x)$.

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{2}\Big[u_{\overline{x}_ix_i} - \Big(S_{3-i}\frac{\partial u^{(+0,5_i)}}{\partial x_i}(x)\Big)_{x_i}\Big] = \sum_{i=1}^{2}\eta_i x_i,$$

где

$$\eta_i x_i = u_{\overline{x}_i} - S_{3-i}\frac{\partial u^{(+0,5_i)}}{\partial x_i}(x), \quad x\in w, \quad i=1,2$$

$$\sum_{i=1}^{2}\Big(z_{\overline{x}_ix_i}, z\Big) = -\sum_{i=1}^{2}\Big(\eta_{ix_i}, z\Big)$$

$$\Big(z_{\overline{y}_ix_i}, z\Big) = -(z_{\overline{x}_i}, z_{\overline{x}_i}]_i = -\|z_{\overline{x}_i}]|_i^2$$

$$(\omega,z]_1 = \sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\omega(i_1h_1,i_2h_2)\,z(i_1h_1,i_2h_2)h_1h_2$$

$$(\omega,z]_2 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2}\omega(i_1h_1,i_2h_2)\,z(i_1h_1,i_2h_2)h_1h_2$$

$$-(\eta_{ix_i}, z) = (n_i z_{\overline{x}_i}]_i$$

$$\sum_{i=1}^{2}||z_{\bar{x}_i}]|^2 = ||\nabla z||^2_{L_2(\omega)} \le \sum_{i=1}^{2}||\eta_i]|_i||z_{\bar{x}_i}]|_i$$

Из чего следует,

$$||\nabla z||^2_{L_2(\omega)} \le \sum_{i=1}^{2}||\eta_i]|_i$$

Вернемся к вопросам, связанными с линейными функционалами.

1 Пространство Соболева с отрицательным индексом

Рассмотрим линейные ограниченные функционалы на пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\omega)$ и обозначим это множество $W_2^{-m}(\omega)$. Так как пространство основных функций $D(\omega)$ вкладывается в $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\omega)$, то любой элемент из $W_2^{-m}(\omega)$ можно ассоциировать с $D'(\omega)$ - пространством функционалов ВООБЩЕ. То есть $W_2^{-m}(\omega) \subset D'(\omega)$. Таким образом, элемент пространства с отрицательным индексом есть обобщенная функция.

1.1. Норма

Так как линейный функционал непрерывный, то можно доказать оценку через полунорму:

$$|\langle f, u\rangle| \le M|u|_{W_2^m(\omega)} \quad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(\omega),$$

$$||f||_{-m,v} = \sup_{||v||_{w,v}=1} |\langle f, v\rangle| = \sup_{v\neq 0} \frac{|\langle f, v\rangle|}{||v||_{m,v}}$$

P.S. $||v||_{w,v} \equiv ||u||_{W_2^m(\omega)}$

Утверждение. Любой элемент из пространства с отрицательным индексом можно представить неединственным образом:

$$\forall f \in W_2^{(-m)} \quad f = \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha f_\alpha, \quad f_\alpha \in L_2(\omega)$$

.

Из чего можно доказать оценку:

$$||f||_{-m,v} \le \sum_{|\alpha|\le m} ||f_\alpha||_{m,v}$$

Пример

$$Lu \equiv -u'' = f(x), \quad \omega = (-1,1), \quad u(-1) = u(1) = 0$$

$$f(x) = \delta(x) \quad \delta(x) = \theta'(x) \quad \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\theta(x) \in L_2(\omega), \quad \delta(x) \in W_2^{(-1)}(\omega)$$

Ставится задача с обобщенным решением:

$$\int_{-1}^{1} u'(x)v'(x)dx = -\int_0^1 v'(x)dx = v(0), \quad \forall v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)$$

Обобщенное решение:

$$u(x) = \begin{cases} 0.5(1+x), & -1 \le x \le 0 \\ 0.5(1-x), & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

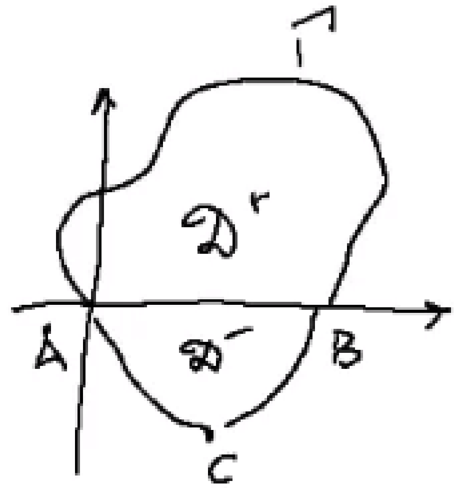
Лекция 8.

1 Классическая задача для параболы гиперболического уравнения с волновым оператором

В классическом плане эта задача понимается следующим образом:
Если есть область, ограниченная верхней полуплоскостью какой-то кривой гамма, то уравнение Трикоми это есть

$$yu_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \tag{8.1}$$

При $y > 0$ уравнение имеет критический тип. При $y < 0$ имеет гиперболический тип.

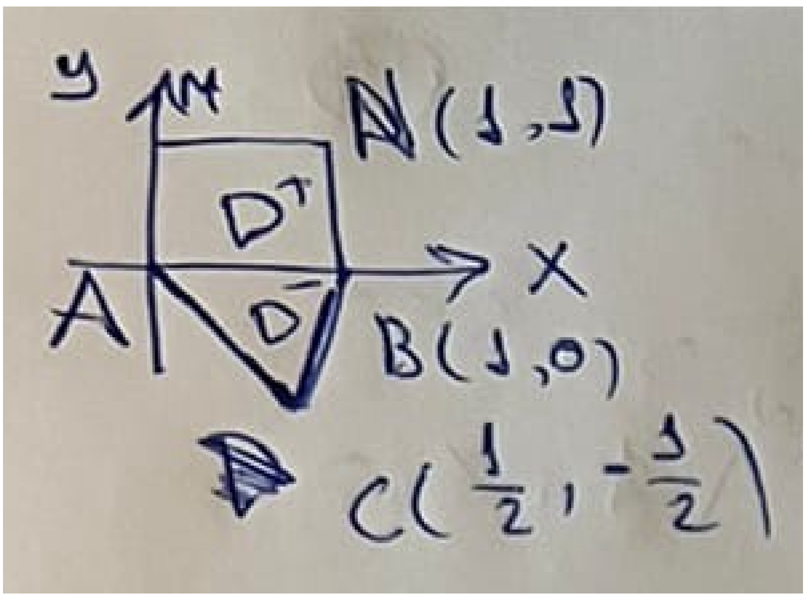


AC и BC - характеристики
Задача - найти $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$u\big|_{\Gamma} = \varphi \tag{8.2}$$

$$u\big|_{AC} = \psi \tag{8.3}$$

Итого,



$$D = D^+ \cup D^- \cup AB \tag{8.4}$$

тогда,

$$\begin{cases} u_x - u_{yy} = g(x,y) & \text{в верхней границе}, y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy} = g(x,y) & \text{в нижней границе}, y > 0 \end{cases} \tag{8.5}$$

$$u(x,y)\Big|_{CA} = \psi(y) \tag{8.6}$$

$$u(x,y)\Big|_{AM} = f(y) \tag{8.7}$$

$$u(x,y)\Big|_{MN} = \varphi(x) \tag{8.8}$$

Таким образом, граничное условие задается не на всей области, а на $g \in C(D^+ \cup D^-)$

$$\begin{cases} \varphi(y) \subset C\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \\ f(y) \subset C\left[0,1\right] \\ \varphi(x) \subset C\left[0,1\right] \\ \ + \text{ условие согласования} \\ \varphi(a) = f(a),\ f(1) < \varphi(a) \end{cases} \tag{8.9}$$

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-) \tag{8.10}$$

Лемма 1. Пусть

$$\psi(a) = a, \tag{8.11}$$

$$g \in L_2(D) \Rightarrow ||u(x,y)||_{L_2(D)} \leq c\left(||g||_{L_2(D)} + ||\psi||_{L_2\left(-\frac{1}{2},0\right)} + ||\varphi||_{L_2(0,1)} + ||f||_{L_2(0,1)}\right) \tag{8.12}$$

Условие $\varphi(0) = 0$ существенно! Если оно не выполняется, то (о ценнике?) не выполняется. Берется плосткость решений, для которых не выполняется это условие и вместо *const c* пишется $\forall$ натурального числа. Из этой плоскости выбирается функция, для которой будет противоположная оценка. Доказательство данной оценки основанно на методе вспомогательной функции. Построение сглаживающей функции, которая является решение задачи Коши для некоторого уравнения (зависимость от геометрии области)

2 Задача 2

(до сих пор нерешенная задача)
Возьмем ту же самую задачу, но немного изменим в ней условие:

$$\begin{cases} u(x,y)\Big|_{CA} = \psi(y) \in C\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \\ u(x,y)\Big|_{AM} = f(y) \in C\left[0,1\right] \\ u_y(x,y)\Big|_{MN} = \varphi(x) \in C\left[0,1\right] \\ \psi(0) = f(0) \end{cases} \tag{8.13}$$

На границе $u_y(x,y) \in c(D \cup MN)$
Обобщить лемму для случая II-го рода

3 Задача 3

Тоже та же самая задача, но:

$$\begin{cases} u_x - u_{yy} = 0 & y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy} = 0 & y > 0 \end{cases} \tag{8.14}$$

$$\begin{cases} u(x,y)\Big|_{CA} = 0 \\ u(x,y)\Big|_{AM} = f(y) \in C\left[0,1\right] \\ u(x,y)\Big|_{MN} = 0 \in C\left[0,1\right] \\ f(0) = f(1) \end{cases} \tag{8.15}$$

Задача Трикоми: $u(x,y) \in L(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$

Теорема 1. Пусть $f(y) \in C^2\left[0,1\right]$, $\alpha > 0 \Rightarrow \exists! u(x,y)$ – решение 8.14 и 8.15 $\Rightarrow$

$$||u(x,y)||_{\text{что?!??!}} + ||u(x,y)||_{<(\overline{D}^-)} \leq C_1 ||f||_{L_1(0,1)} \tag{8.16}$$

Рассмотрим

$$||u(x,y)||_{L_{3p-\varepsilon}(D^+)} + ||u(x,y)||_{c\left(\overline{D}^-\right)} \leq C_1 ||f||_{L_p(0,1)} \tag{8.17}$$

Лекция 9

1 Получение оценки скорости сходимости

Введем в рассмотрение следующие ячейки:

$$e^i(x), \ \ i = 1, 2, \ \ x \in w$$

$$e^i(x) = \{f = (\xi_1, \xi_2) : x_i - h_i < \xi_i < x_i, \ \ |x_{3-i} - \xi_{3-i}| < \frac{h_{3-i}}{2}\}$$

Имеет место взять следующие вложения:

$$\Omega_1 = \bigcup_{i_1=1}^{N_1} \bigcup_{i_2=1}^{N_2-1} e^1(i_1h_1, i_2h_2) \subset \Omega$$

$$\Omega_2 = \bigcup_{i_1=1}^{N_1-1} \bigcup_{i_2=1}^{N_2} e^2(i_1h_1, i_2h_2) \subset \Omega$$

Рассмотрим функционал:

$$\eta_1(x) = u_{\bar{x}_1}(x) - \frac{1}{R_2} \int\limits_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1 - \frac{h_1}{2}, \ \ \xi_2) d\xi_2$$

После замены переменных

$$\xi_i = x_i + s_ih_i$$

область $e^1(x)$ переходит в

$$e^1(x) \to E^1 = \{(s_1, s_2) : -1 < s_1 < 0, |s_2| < 0,5\}$$

Если положить

$$\tilde{u}(s_1, s_2) = u(x_1 + s_1h_1, \ \ x_2 + s_2h_2)$$

то получим следующее выражение для функционала:

$$\eta_1(x) = \frac{1}{h_1} \left[\tilde{u}(0, 0) - \tilde{u}(-1, 0) - \int\limits_{-0,5}^{0,5} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi_1}(-0,5, \ \ s_2) ds_2 \right]$$

Очевидно, что если функция $u(x) \in W_2^m, \ \ m \in [2, 3]$, то $u(x) \in W_2^m(e^1), \ \ u(x) \in W_2^m(E^1)$

Также очевидно из $W_2^2(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ следует, что $|\eta_1(x)| \leq \frac{M}{h_1}||u||_{W_2^m(E^1)}$

Этот функционал обращается в нуль на многочленах второй степени, следовательно по лемме Брэмбла-Гильберта

$$|\eta_1(x)| \leq \frac{M_1}{h_1}|u|_{W_2^m(E^1)}$$

Если теперь произвести обратную замену переменных, то получим

$$|\eta_1(x)| \leq \frac{M_1}{h_1}|u|_{W_2^m(E^1)} \leq M_2|h|^m(h_1h_2)^{-\frac{1}{2}}|u|_{W_2^m(e^1)}$$

Теорема 1 (о скорости сходимости схемы для решений из пространств Соболева $W_2^m,\ m \in [2,3]$).

Пусть $u(x) \in W_2^m(\Omega),\ \ m \in [2,3]$ -решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = -f, \quad f \in L_2(\Omega) \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

Тогда построенная разностная схема сходится в сеточной метрике $W_2^1(\omega)$ со скоростью $O(|h|^{m-1})$, то есть выполняется оценка:

$$||y-u||_{W_2^1(\omega)} \leq M_3 |h|^{m-1}\, ||u||_{W_2^m(\Omega)}$$

Доказательство. Следует из

$$||\eta_i]|_i = \left(\sum_x |\eta_i(x)|^2 h_1 h_2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M_3 |h|^{m-1} \left(\sum_x |u|^2_{W_2^m(e^i(x))}\right)^{\frac{1}{2}} \leq M |h|^{m-1}\, |u|_{W_2^m(\Omega)}$$

и оценки градиента. $\square$

2 Задача о нахождении нормы линейного функционала

Задача:
Найти норму линейного функционала, порожденного δ - функцией в пространстве $W_2^1(-\pi,\pi)$ Так как на прямой W_2^1 вкладывается в класс непрерывных функций, то каждой функции из класса W_2^1 ставится в соответствие значение в нуле. По теореме Рисса—Фреше каждый такой функционал представим в виде скалярного произведения, поэтому будет выполняться следующее соотношение:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (u_x v_x + uv)dx = u(0), \quad \|v\|_{W_2^1(-\pi,\pi)} = \|f\|$$

Таким образом, нужно найти соответствующую функцию u, и тогда мы найдем норму линейного функционала. Предпологая, что функция v в нуле терпит разрыв, проинтегрируем левую часть равенства и получим:

$$u(\pi)v_x(\pi) - u(-\pi)v_x(-\pi) + u(0)\left[v_x(0-0) - v_x(0+0)\right] + \int\limits_{-\pi}^{\pi} u(v - v_{xx})dx = u(0)$$

Если v удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} v - v_{xx} = 0, \ \ x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ v_x(\pi) = v_x(-\pi) = 0 \\ v_x(0-0) - v_x(0+0) = 1 \end{cases}$$

то равенство сводится к тождеству. Поэтому фактически решение задачи сводится к поиску такой функции v.
Функцию v можем определить таким образом, что

$$v_x = \begin{cases} \dfrac{ch(x-\pi)}{e^\pi - e^{-\pi}}, & x > 0 \\ \dfrac{ch(x+\pi)}{e^\pi - e^{-\pi}}, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{тогда} \quad v = \begin{cases} \dfrac{sh(x-\pi)}{e^\pi - e^{-\pi}}, & x > 0 \\ \dfrac{sh(x+\pi)}{e^\pi - e^{-\pi}}, & x < 0 \end{cases}$$

$$\|v\|^2_{W_2^1(-\pi,\pi)} = \frac{1}{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2}\left[\int\limits_0^{\pi}\left[ch^2(x-\pi)+sh^2(x-\pi)\right]dx + \int\limits_{-\pi}^{0}\left[ch^2(x+\pi)+sh^2(x+\pi)\right]dx\right] =$$

$$= \frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2(e^{\pi}-e^{-\pi})^2} = \frac{cth(\pi)}{2}$$

Ответ: $\quad ||f|| = \sqrt{\dfrac{cth(\pi)}{2}}$

Лекция 10

1 Задача Трикоми для уравнения Трикоми

Пусть есть плоскость (x, y). На оси oX расположены 2 точки - $A(a, 0)$ и $B(b, 0)$, в области $y > 0$ расположена кривая Γ, соединяющая эти точки. В области $y < 0$ - 2 характеристики, выходящие из данных точек и пересекающиеся в точке C (AC и BC, далее обозначенные как l_1 и l_2 соответственно). Эти 3 кривые ограничивают область $\mathfrak{D}$.

Определение. *Задача Трикоми для уравнения Трикоми* – задача, которая состоит в том, чтобы найти функцию $u \equiv u(x, y) \in C(\overline{\mathfrak{D}}) \cap C^1(\mathfrak{D}) \cap C^2(\mathfrak{D}^+ \cup \mathfrak{D}^-)$ такую, что:

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 & \text{– уравнение Трикоми} \\ u\Big|_{\Gamma} = \varphi, u\Big|_{l_1} = \Psi & \text{– граничные условия} \end{cases}$$

где $\mathfrak{D}^+ = \mathfrak{D} \cap \{y > 0\}$, $\mathfrak{D}^- = \mathfrak{D} \cap \{y < 0\}$.

Задача ставится в области, где уравнение имеет так и эллиптический, так и гиперболический тип, т.н. уравнение смешанного типа. При $y > 0$ тип эллиптический, при $y < 0$ - гиперболический.
Важное упоминание - граничных условий на l_2 не дано.
Решение задачи состоит в следующем:
– обозначим $u(x, 0) = \tau(x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = \nu(x)$
– предпологая известными одну из функций мы рассматриваем задачу соответственно Дирихле или Дирихле-Неймана в эллиптической части, 1я или 2я краевая задача Дарбу в гиперболической части.
– эти 2 задачи дают нам систему для $\tau(x)$ и $\nu(x)$ и исключая $\nu(x)$ наш нахваленный Франческо Трикоми получил вот такое сингулярное интегральное уравнение, где интеграл принимается в смысле главного значения –

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_a^b \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right) \nu(t)dt + \int_a^b \kappa(x,t)\nu(t)dt = F(t),$$

где $\kappa(x, t)$ - регулярное ядро произвольного типа. Решение единственно, что доказывается через принцип максимума, и задача корректна.

2 Задача Трикоми для уравнения Чаплыгина

$A, B, C, \mathfrak{D}, \Gamma$ определены так же, как и в предыдущей задаче.

Определение. *Уравнение Чаплыгина* – уравнение вида

$$K(y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0,$$

где $K(0) = 0, K'(y) > 0$ (как и в уравнении Трикоми, при $y > 0$ тип уравнения эллиптический, при $y < 0$ - гиперболический).

Определение. *Задача Трикоми для уравнения Чаплыгина* – задача, которая состоит в том, чтобы найти функцию $u \equiv u(x, y) \in C(\overline{\mathfrak{D}}) \cap C^1(\mathfrak{D}) \cap C^2(\mathfrak{D}^+ \cup \mathfrak{D}^-)$ такую, что:

$$\begin{cases} K(y)\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 & \text{– уравнение Чаплыгина} \\ u\Big|_{\Gamma} = \varphi, u\Big|_{AC} = \Psi & \text{– граничные условия} \end{cases}$$

и ур-е характеристик имеет вид:

$$AC : \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{-K(y)}}, CB : \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{-K(y)}}.$$

Задача является решенной.

<очень много исторических справок>

Определение. *Обобщенная задача Трикоми (задача Франко)* – задача, аналогичная 2м вышеуказанным, за исключением того, что вместо условия на AC, ставится условие на некоторой кривой γ, и

$$\gamma : 0 \geq \frac{dy}{dx} \geq -\frac{1}{\sqrt{-K(y)}}$$

и CB должна пересекать γ не более, чем в одной точке.
Корректность задачи была обоснована, но сама задача не решена и остается открытой.

<очень много напоминаний что задача не решена и что ее можно и нужно решать>

3 Задача Трикоми-Неймана

Определение. *Уравнение Лаврентьева-Бицадзе* – уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn}(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Определение. *Задача Трикоми-Неймана* – задача такая, что:

1. Дана полуполоса $\mathfrak{D}^+$ в направлении $+y$ от 0 и шириной по x от 0 до π
2. Даны точки $A(0,0), B(\pi,0), C(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$
3. Имеет место уравнение Лаврентьева-Бицадзе
4. Граничное условие второго рода на боковых стенках:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0, 0 < y < +\infty$$
5. На AC ставится условие первого рода: $u(x,-x) = f(x), 0 \leq x \leq \pi/2$
6. На AB ставится условие склеивания производных вида:
$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,-0), 0 \leq x \leq \pi,$$
где $k \neq 0$

7. $\lim_{y\to+\infty} u = 0$

Существование:

1. в гиперболической части выписываем общее решение вида $F(x+y)+f(\frac{x-y}{2})$ (вдоль AC и CB)
2. удовлетворяем условию склеивания
3. предполагаем, что решение в элл. части представимо в виде ряда, получаем задачу о возможности разложения некой ф-ии в ряд по некоторым синусам

Например, предположим, что в элл. части действует такой вид:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-ny}\cos nx, y > 0.$$

Он удовлетворяет граничному условию на боковых стенках и уходит в 0 при $y \to +\infty$.
Тем временем в гип. части:

$$u(x,y) = F(x+y) + f(\frac{x-y}{2}), y < 0.$$

Учитывая, что в гип. части

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=0} = -f'(\frac{x}{2})$$

имеем

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0 \\ \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,+0) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,+0)\Big|_{y=0} = -f'(\dfrac{x}{2}) \end{cases}$$

при $y > 0$. Таким образом исходная задача была редуцирована к задаче Лапласа.
Вышепредставленный ряд удовлетворяет условию с Δ и г.у. Спустя много алгебры, мы сможем найти A_n через соотношение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n n \sin\left(nx - arctg(\frac{1}{k})\right) = -\frac{kf'(x/2)}{\sqrt{1+k^2}}, 0 < x < \pi.$$

Если $f'(x)$ достаточно хороша, чтобы разложить ее в ряд Фурье с такими коэффициентами, то задача решена. Но здесь возникает проблема построения биортогонально сопряженной системы и возможности разложения по такому базису (с помощью базиса Риса задача решена для $|k| > 1$), и должны выполняться двусторонние оценки для коэф-ов ряда.

Короче, эта задача решена наполовину, и то через жопу. Суть, с которой он всю эту херь говорил, состоит в том, что "такую обобщенную простую задачу спектральным методом можно свести к довольно сложной и в этом примере идет отдельный пиздец с сдвигами.